1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + tx^2 + t^2x$.

   (a) Untersuchen Sie die Funktionen auf Symmetrie.
   (b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen in Abhängigkeit von t.
   (c) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktionen in Abhängigkeit von t.
   (d) Geben Sie gegebenenfalls Extrema, Wendepunkte und Terrassenpunkte der Funktionen in Abhängigkeit von t an.
   (e) Geben Sie die Ortslinie der Terrassenpunkte an.
   (f) Zeichnen Sie die Funktion für $t = 2$.
   (g) Zeichnen Sie die Funktionenschar und die Ortslinie der Terrassenpunkte mit einer geeigneten Software.

Lösung: (a) keine Symmetrie
(b) $N(0|0)$
(c) Waagrechte Tangente für $x = -t$, sonst immer streng monoton steigend.
Für $x < -t$ rechtsgekrümmt, für $x > -t$ linksgekrümmt.
(d) keine Extrema, Terrassenpunkt bei $(-t| - \frac{1}{3}t^3)$
(e) $y = \frac{1}{3}x^3$

2. Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - t^2x$.

   (a) Untersuchen Sie die Funktionen auf Symmetrie.
   (b) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen in Abhängigkeit von t an.
   (c) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktionen in Abhängigkeit von t.
   (d) Geben Sie gegebenenfalls Extrema, Wendepunkte und Terassenpunkte der Funktion in Abhängigkeit von t an.
   (e) Geben Sie die Ortslinien der Extrema an.
   (f) Zeichnen Sie die Funktionsschar.

Lösung: (a) $f(-x) = -f(x)$, also punktsymmetrisch.
(b) $N_1(-\sqrt{3}\ t|0)$, $N_2(0|0)$, $N_3(\sqrt{3}\ t|0)$
(c) $f'(x) = (x-t)(x+t)$, also steigend für $x \in]-\infty, -t[\cup]t, \infty[$ und fallend für $x \in]-t, t[$.
$f''(x) = 2x$, also rechtsgekrümmt für $x < 0$ und linksgekrümmt für $x > 0$.
(d) Maximum bei $(-t|\frac{2}{3}t^3)$, Minimum bei $(t| - \frac{2}{3}t^3)$, Wendepunkt bei $(0|0)$, kein Terrassenpunkt für $t \neq 0$.
(e) $y = -\frac{2}{3}x^3$

3. Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = x^3 + tx^2 + x + 1$.

   (a) Untersuchen Sie die Funktionen auf Symmetrie.

   (b) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktionen in Abhängigkeit von t.

   (c) Geben Sie gegebenenfalls die x-Koordinaten der Extrema, Wendepunkte und Terrassenpunkte in Abhängigkeit von t an.

   (d) Geben Sie die Ortslinie der Wendepunkte an.

   (e) Zeichnen Sie die Funktion für $t = 2$.

   (f) Zeichnen Sie die Funktionsschar und die Ortslinie der Wendepunkte mit einer geeigneten Software.

Lösung: (a) keine Symmetrie

(b) Für $|t| < \sqrt{3}$ strend monoton steigend.
Für $|t| > \sqrt{3}$ streng monoton steigend im Intervall
$x \in]-\infty, \frac{-t-\sqrt{t^2-3}}{3}[\cup]\frac{-t+\sqrt{t^2-3}}{3}, \infty[$, sonst streng monoton fallend.
Für $x < -\frac{1}{3}t$ rechtsgekrümmt und für $x > -\frac{1}{3}t$ linksgekrümmt.

(c) Maximum bei $x = \frac{-t-\sqrt{t^2-3}}{3}$, Minimum bei $x = \frac{-t+\sqrt{t^2-3}}{3}$ (für $|t| < \sqrt{3}$ keine Extrema) und Wendepunkt bei $x = -\frac{1}{3}t$.
Für $|t| = \sqrt{3}$ Terrassenpunkt bei $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

(d) $y = -2x^3 + x + 1$